Walsh級数について(Martingaleに関連する諸問題)

舘岡, 淳

数理解析研究所講究録
第 706 巻 1989 年 67-80

Walsh 級数について

舘岡 淳 (Jun Tateoka)
秋田大学教育学部

1 始めに

Rademacher 函数は $[0,1]$ 上の函数で,

$$r_k(x) := sign(\sin 2^{k+1}\pi x)\,(\,k=0,1,\cdots,0<x<1\,)$$

で定義される。$\{r_k\}$ は Borel-Lebergue 測度に関して $[0,1]$ 上の正規直交系であるが, 完備でない。そこで

$$w_0(x) :\equiv 1,$$

$n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_l 2^l\,(a_l = 1, a_k = 0\,or\,1,\ k = 0,1,\cdots,l-1)$ の時

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{l} r_k(x)^{a_k}$$

とおくと, $\{w_k\}$ は $[0,1]$ で完備正規直交系になる。これが Walsh 系である。$f \in L^1[0,1]$ に対して

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) w_k(x),\ \hat{f}(k) := \int_0^1 f(x) w_k(x) dx,$$
$$S_n f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) w_k(x)$$

とおく。また $x \in [0,1]$ に対して, x を含む長さ 2^{-k} の区間を $x + P^k$ とおけば,

$$S_{2^k} f(x) = \frac{1}{|x+P^k|} \int_{x+P^k} f(t) dt$$

と書ける。これは次のように考えられる。$x \in [0,1]$ は $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^{-k}, (a_k = 0\,or\,1)$ と書いてよい。そこで x と数列 $\{a_0, a_1, \cdots\}$ を同一視する。このとき x が 2 進有理数ならば, x の表し方は一意でないから, この対応は 1 : 1 でない。この数列空間で, 加法は各座標毎に 2 を法とし $x\dot{+}y$ 等と表される。距離で位相を入れると, コンパクト, アーベル群になり, これを 2 進群, Walsh-Paley 群, 2^ω という。2^ω 上の Borel 環や Haar 測度は $[0,1]$ 上の通常の Borel-Lebesgue 構造と一致するので、測度論的、積分論的問題は同じに扱ってよい。この対応については [7] (Appendix C) に詳しい。以下では 2^ω を体 K_2 のコンパクト部分集合,Walsh 函数をこの指標と見ることにする。Walsh 級数に関する文献は, [1],[50],[30],[33] に多くある。

2 2-series numbers field K_2 とその指標

2 を法とした剰余体上のべき級数の集合 K_2 の元は

$$x = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i \, (a_i \in GF(2))$$

と書ける。 t は K_2 の固定した元である。2 つのべき級数の和, 積は通常のように定義する。2進群 2^ω は K_2 のコンパクト部分集合である。実際,

$$x = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i \, (\, a_k \neq 0\,)$$

に対して, $|x| := 2^{-k}$, $|0| := 0$ とおくと, $|x+y| \leq max(|x|, |y|)$, $|x+y| = max(|x|, |y|)\,(if\, |x| \neq |y|)$, $|xy| = |x||y|$ が成り立つ。$\{x \in K_2 : |x| \leq 2^{-i}\}$ は 0 の近傍系で, K_2 は局所コンパクト, 非離散,totally disconnected 体になる。また, K_2 の元で

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

の全体 $O := \{x \in K_2 : |x| \leq 1\}$ はコンパクト環で, 加法のもとでは2進群2^ω と一致する。
$P := \{x \in K_2 : |x| < 1\}$ とおくと, $tO = P$ である。K_2 の加群 K_2^+ の Haar 測度を選ぶと, $d(ax) = |a|dx, E \subset K_2$ に対して $|E| := \int_{K_2} \xi_E(x)dx$ (ξ_E: E の特性函数) とするとき $|O| = 1$ と出来る。また $P^k := \{x \in K_2 : |x| \leq 2^{-k}\}$ とおけば, $O = P^0, P = P^1, |P| = 2^{-1}, |t| = 2^{-1}$ である。

次にK_2 上の指標を定義する。$x \in K_2^+$ を

$$x = x_0 + \sum_{i=k}^{-1} a_i t^i \, (\, a_i = 0\, or\, 1, x_0 \in O\,)$$

と書いて,

$$\chi(t^k) := \begin{cases} -1 & \text{if } k = -1 \\ 1 & \text{if } k < -1, \end{cases} \quad \chi(x_0) := 1$$

とおけば, $\chi(x) = 1\,(|x| \leq 1)$, $\chi(x) = -1\,(\,|x| = 2\,)$ である。ここで, $\chi_u(x) := \chi(ux), (\,u, x \in K_2\,)$ さらに$\chi_u := \chi_u|_O$ とおくと, χ_u は O 上の指標になる。$\{u(n)\}_0^\infty$ を K_2^+ 上の O による剰余類の代表系とすれば, $\{\chi_{u(n)}(x)\}_0^\infty$ は, 完備正規直交系になる。この $\{u(n)\}_0^\infty$ に次のように自然な順序を入れる。$u(0) := 0, u(1) := t^{-1}$, $n = b_0 + b_1 2 + \cdots + b_s 2^s\,(b_k = 0\, or\, 1)$ に対して, $u(n) := u(b_0) + t^{-1}u(b_1) + \cdots + t^{-s}u(b_s)$ とおく。そうすれば, $u(n+m) \neq u(n) + n(m)$, $0 \leq r, k$, $0 \leq q < 2^k$ に対して, $u(r2^k + q) = u(r2^k) + u(q) = t^{-k}u(r) + u(q)$, $|u(n)| = 2^k \Leftrightarrow 2^{k-1} \leq n < 2^k$ が成り立つ。また, $\chi_n := \chi_{u(n)}$ と書けば $\chi_n = \prod_{k=0}^{s} (\chi_{2^k})^{b_k}$, $\chi_{2^s}(x) = \chi_1(t^{-s}x)$ が成り立つ。これが Rademacher 函数と Walsh 函数の関係である。種々の順序に対する Walsh 函数については [8] に詳しい。

ここで, O は, 位数 2 の巡回群 $\mathbf{Z}(2)$ の可付番直積である。この O を更に一般にして位数 p_i の巡回群 $\mathbf{Z}(p_i)$ の可付番直積上で考えたのが Genelalised Walsh 系, 第 2 可算公理を満たす 0-次元, コンパクト可換群上のが Vilenkin 系である。これらについては [53],[33],[42],[12] が詳しい。

3 n 部分和

扱う函数は複素数値,Borel 可測函数とする。はじめに Walsh-Fourier 級数の n- 部分和を調べる。$f \in L^1(O)$ に対して

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\chi_n(x),\ \hat{f}(n) := \int_O f(x)\chi_n(x)dx$$
$$S_n f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x) = (D_n * f)(x),\ D_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), D_0 := 0$$

とおく。Dirichlet 核 D_n は次の性質を持つ。 $D_{2^n}(x) = 2^n \Phi_n(x)(\Phi_n : P^n$ の特性函数), $\int_O D_n(x)dx = 1, D_{r2^k+q}(x) = D_{2^k}(x)D_r(t^{-k}x) + \chi_r(t^{-k}x)D_q(x)\ (r > 0,\ 0 \le q < 2^k)$, $|D_n(x)| < \frac{2}{|x|}\ (x \ne 0), |D_n(x)| \le n.$

- (Kaczmartz) $f \in L^1(O)$ ならば, $S_{2^n}f(x) \to f(x)\, a.e.$
- (Hardy-Littlewood) $Mf(x) := sup S_{2^n}|f|(x)$ とおけば,

  $(i)\, f \in L^1(O), \forall y > 0$ に対して $|\{x \in O : Mf(x) > y\}| \le \frac{1}{y}\|f\|_1,$

  $(ii)\, f \in L^P(O),\ 1 < p < \infty$ に対して $\|Mf\|_p \le C_p\|f\|_p,\ C_p = O\left(\frac{p}{p-1}\right).$

- (M.Riesz) $1 < p < \infty$ に対して $\|S_n f(x)\|_p \le C_p\|f\|_p, C_p = O\left(\frac{p^2}{p-1}\right).$
  Paley はこの定理をいわゆる Paley の等式 ([22])

  $$\chi_n(D_n * f)(x) = \sum_{k=0}^{[log_2 n]} e_k d_k(\chi_n f)(x),\ (e_k = 0\, or\, 1),\ d_k := S_{2^k}f - S_{2^{k-1}}f$$

  から導いた。

- (Watari [55], Igari [20], Young [74]) $f \in L^1(O), \forall y > 0$ に対して $|\{x \in 0 : |S_n f(x)| > y\}| \le \frac{C}{y}\|f\|_1.$

  L^1 函数の分解定理 (Igari [18]) を用いた。

4 函数空間

O 上の test 函数,distribution, $p - atom\ (0 < p \le 1)$, Hardy 空間,Lipschtz 空間等を定義する。
$S(O) = S$ は O 上の test 函数の集合とする。即ち $\phi \in S$ は, ϕ が O におけるある P^k の剰余類の上で定数である。このとき, $\phi \in S$ は $\sum_{n=0}^{2^k-1} \hat{\phi}(n)\chi_n(x)$ と書ける。$\sum_{n=0}^{k-1} \hat{\phi}(n)\chi_n(x)$ の全体

を $S(k)$ と書く。$S'(O) = S'$ は O 上の distributions の全体とする。$f \in S', \phi \in S$ の pairing を $< f, \phi >$ で表す。S' の元 f は形式的には $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\chi_n, \hat{f}(n) :=< f, \chi_n >$ と書ける。
$a(x)$ が $p-atom\,(0 < p \leq 1)$ とは, $a(x) \equiv 1$ または, (1)$supp\,a \subset x + P^k, (\exists x \in O, \exists k \in$ N), (2)$\|a\|_\infty \leq 2^{k/p}$, (3) $\int a = 0$.
$f \in S'$ に対して次のようにおく。

$$\begin{aligned}
&S_{2^n} f(x) :=< f, D_{2^n}(x - \cdot) >, \\
&f^*(x) := sup_n |S_{2^n} f(x)|, \\
&Sf(x) := \{\sum_0^{\infty} (S_{2^n} f(x) - S_{2^{n-1}} f(x))^2\}^{\frac{1}{2}} = \{\sum_0^{\infty} (d_n f(x))^2\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Hardy 空間 $H^p(O) = H^p\,(0 < p < \infty)$ を, $H^p(O) := \{f \in S' : \|f\|_{H^p} := \|Sf\|_p < \infty\}$ と定義する。
$0 < p \leq 1$ のときは, 次が成り立つ。

$$\|f^*\|_p \sim \|Sf\|_p \sim inf\{(\sum_0^{\infty} |c_j|^p)^{\frac{1}{p}} : f = \sum c_j a_j, a_j : p - atom\}$$

Lipschtz 空間等を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
&\Lambda_\alpha := \{f \in L^1 : sup_I |I|^{-\alpha} |f - f_I|_I < \infty\}\,(\alpha > 0), \\
&Lip_\alpha^{(p)} := \{f \in L^1 : sup|t|^{-\alpha} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p < \infty\}\,(0 < p \leq \infty), \\
&BMO := \Lambda_0, \\
&VMO := \{f \in BMO : \lim_{|I| \to 0} |f - f_I|_I = 0\}
\end{aligned}$$

とおく。ここで $f_I := \frac{1}{|I|} \int_I f(u) du$, $I := x + P^k$ である。そうすれば

$$sup_I |I|^{-\alpha} |f - f_I|_I \sim sup|t|^{-\alpha} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_\infty.$$

$f \in L^\infty$ が次を満たすとき有界変動という。

$$V^* f := sup_k \sum_{n=1}^{2^k} sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S_n^k,\ S_n^k \text{は} P^k \text{の剰余類}\} < \infty.$$

H^p や Lipschtz 空間は (Chao [4,5]) に詳しい。

5 (C, α)平均

$f \in L^1$ に対して $\sigma_n^\alpha f(x) := (f * K_n^\alpha)(x)$ を (C, α) 平均という。
特に$\sigma_n f(x) := (f * K_n)(x)$ を $(C, 1)$ 平均という。ここで,

$$\begin{aligned}
&K_n^\alpha(x) := \frac{1}{A_{n-1}^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k-1}^\alpha \chi_k(x), A_n^\alpha = \frac{1}{n!}(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n), A_0^\alpha = 1 \\
&K_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \chi_k(x), K_0 := 0
\end{aligned}$$

そうすれば, $|K_n(x)| \le \dfrac{n+1}{2}$, $\int K_n = 1, |K_n(x)| \le \dfrac{2}{|x|}$, $\int |K_n| \le C$,
$\int_{2^{-k}\le|x|\le 1} |K_n(x)|dx = o(1)\, as\, n \to \infty, (\forall k > 0)$ が成り立つ。最後の部分は, $n = r2^k + s$, $0 \le r$, $0 \le s < 2^k$ に対して次の分解を用いる。

$$nK_n(x) = 2^k D_{2^k}(x) r K_r(t^{-k}x) + sD_{2^k}(x)D_r(t^{-k}x) + D_r(t^{-k}x)2^k K_{2^k}(x) + \chi_r(t^{-k}x)sK_s(x)$$

$(C,1)$ 平均,Abel 平均は Walsh 級数に対して良い評価を与えない。例えば, $|nK_n(x)| \le \dfrac{4}{|x|^2}$ は成立しない。(Fine[9],yano[61])

- $f \in L^p$ の時, $\sigma_n f \to f$, $in\, L^p\, (1 \le p < \infty)$.
- (Fine [9,10],Yano[61]) $f \in L^1$ の時, $\sigma_n^\alpha f(x) \to f\, a.e. (\alpha > 0)$.
- (Paley [22], Sunouchi [29], Yano [65])

$$\|sup\, \sigma_n^\alpha f\|_p \le \|f\|_p (1 < p < \infty),\ \|sup\, \sigma_n^\alpha f\|_1 \le \int |f| \log^+ |f| + C.$$

- (Fujii [11]) $\|sup\, \sigma_n f\|_1 \le C\|f\|_{H^1}$.

6 局所性と一意性

2 変数 Walsh-Fourier 級数$f(x) \sim \sum \hat{f}(n)\chi_n(x)$, $x \in O^2$ に対して

$$f_r(x) := \sum \hat{f}(n) r^n \chi_n(x) = \int_{O^2} f(y) P_r(x-y) dy$$
$$P_r := P_{r_1}(x_1) P_{r_2}(x_2),\ P_{r_j} := \sum_{k=0}^{\infty} r_j^k \chi_k(x_j) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + r_j^{2^k} \chi_{2^k}(x_j))$$
$$S_n := \sum_{m_j \le nj} \hat{f}(m)\chi_m(x) = \int_{O^2} f(y) D_n(x-y) dy,\ D_n(x) := D_{n_1}(x_1) D_{n_2}(x_2)$$

とおく。f_r は $r_1 = r_2$ の時球形 Abel 平均, そうでないときは矩形 Abel 平均という。部分和$S_n f$ についても同じである。$P_r^m(x) = \prod_{k=0}^{m} \left(1 + r^{2^k} \chi_{2^k}(x)\right)$ を評価すると次が成り立つ。
$P_r(x) \ge 0\, (0 \le r < 1)$, $P_r(x) < \dfrac{2}{|x|} (0 \le r < 1, 0 < |x| < 1)$, $P_r(x) < \dfrac{1}{1-r} (0 \le r < 1, 0 < |x| < 1)$, $\int_O P_r(x) dx = 1$, $\|P_r(\cdot)\|_p^p \sim \left(\dfrac{1}{1-r}\right)^{1-p}, (p \ge 1)$, $\int_{2^{-k} < |x|} P_r(x)^p dx \sim (1-r), (p = 1,2,3)$.
函数空間 X において総和法 T に対して局所性 (L.P.) を持つとは, $f \in X$ が開集合 V で$f = 0$ のとき, V のコンパクト部分集合で 0 にT 総和可能となることである。

- ([35]) (i) 球形部分和は連続函数 $C(O^2)$ に対して L.P. を持たない。(ii) 球形 Abel 平均は $L^p(O^2)$ で, $p \ge 2$ に対して L.P. をもち $1 \le p < 2$ に対して持たない。(iii) 矩形 Abel 平均は $C(O^2)$ に対して L.P. を持ち, $L^p(O^2), (p > 1)$ に対して持たない。

$E \subset O$ が一意集合 ($U - set$) とは, 零級数が E を除いた集合で 0 に収束するただ一つの Walsh 級数であることと。また $E \subset O$ が Walsh 級数のクラス A に対する $U - set$ であるとは, $W \in A$, $S_{2^n}W(x) \to 0\, as \to \infty\, for\, x \notin E$ ならば W は零級数になることとである。
これらの一意性については Wade [43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52], Yoneda [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73] に詳しい。

7 近似

連続度、最良近似と絶対収束の関係を調べる。

$$\omega^{(p)}(2^{-k}, f) := \sup\{f \in L^p : \sup \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p : |t| \le 2^{-k}\}$$
$$E_n^{(p)}(f) := \inf\{\|f - P\|_p : P \in S(n)\}.$$

とおくと次が成り立つ。

- (Yano [64]) $f \in \Lambda_\alpha$ ならば, $\sigma_n f - f = O(n^{-\alpha})\,(0 < \alpha < 1)$.

- (Watari [54,59]) $\alpha > 0$ に対して $1 < p < \infty$ の時, 次は同値である。

  $$\text{(i)}\, f \in Lip_\alpha^{(p)},\quad \text{(ii)}\, \omega^{(p)}(2^{-n}, f) = O(2^{-n\alpha}),$$
  $$\text{(iii)}\, E_m^{(p)}(f) = O(m^{-\alpha}),\quad \text{(iv)}\, \|f - S_{2^n}\|_p = O(2^{-n\alpha}).$$

  これは $L^p\,(0 < p \le 1)$, $H^p\,(0 < p \le 1)$, VMO に対しても成立する。詳しくは Strozenko, Krotov and Oswald [28], [37]. またこれは絶対収束に関する次の Bernstein-Steckin に応用される。(Watari [60])

- (Bernstein-Steckin) $f \in L^1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} E_n^2(f) < \infty$ ならば, $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$

この定理の条件は Zygmund-Salem の条件や Satz の条件を含んでいる。 Walsh 級数等の絶対収束については,Uno [38,39,40,41] Kinukawa [21] 等の結果がある。

8 Square 函数

Kaczmartz-Zygmund は $(C, 1)$ 平均を調べるために

$$Kf(x) := \Big(\sum_{n=2}^{\infty} n|\sigma_n f - \sigma_{n-1} f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

とおいて, **T**上で次を示した。

$$\|Kf\|_2 \le C\|f\|_2$$

この $Kf(x)$ に類する函数を Square 函数と呼ぶことにする。次のような結果がある。

- (Paley [22]) $f \in L^p\,(1 < p < \infty)$ に対して $d_k f = S_{2^k} f(x) - S_{2^{k-1}} f(x) := E(f|F_k) - E(f|F_{k-1})$ とおくと,

  $$\|\{\sum_{k=0}^{\infty}(d_k f(x))^2\}^{\frac{1}{2}}\|_p \sim \|f\|_p,$$
  $$\|\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{n_1-1}\varepsilon_{n_1,n_2}\Big(\sum_{m=2^{n_1}+2^{n_2}}^{m=2^{n_1}+2^{n_2+1}-1}\hat{f}(m)\chi_m\Big)^2\}^{\frac{1}{2}}\|_p \sim \|f\|_p,\ \varepsilon_{n_1,n_2} := \pm 1.$$

- (Hirshman [17]) $f \in L^1\,(1 < p < \infty)$, $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$ に対して

$$\|\{\sum_{k=0}^{\infty}(d_k f(x))^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{p,\omega} \sim \|f\|_{p,\omega} \text{ ここで}, \omega(x) := |x|^{\alpha},\ \|f\|_{p,\omega}^p := \int |f|^p \omega.$$

- (Sunouchi [29,31]) $1 < p < \infty$ の時 $K'f(x) := (\sum_{n=0}^{\infty} |S_{2^n} f - \sigma_{2^n} f|^2)^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$$\|Kf\|_p \sim \|f\|_p,\ \|K'f\|_p \sim \|f\|_p.$$

- (Yano [66], Watari [57,58]) $f \in L^1$ に対して $\delta^* f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k d_k f(x)$, $\varepsilon_k = \pm 1, or\, 0$, $y > 0$ とおくと

$$|\{x \in O : |\delta^* f(x)| > y\}| \le \frac{C}{y}\|f\|_1.$$

- (Wade [45]) $f \in S'$, $0 < p < 1$ に対して

$$\|Kf\|_p \le C\|K'f\|_1,\ \|K'f\|_p \le C\|Sf\|_1,\ \|Sf\|p \le C\|Kf\|_1.$$

- ([36]) $f \in S$ に対して $g(f)(x) := \{\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_{n+1} f - \sigma_n f)^2 a_n\}^{\frac{1}{2}}$ とおく。ここで $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim n$, $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{a_k} \le C2^n$ である。

  $(i)\, f \in H^1$, $y > 0$ の時 $|\{x \in O : g(f)(x) > y\}| \le \frac{C}{y}\|f\|_{H^1}$,

  $(ii)\, f \in H^1$ の時 $\|g(f)\|_p \le C\|f\|_{H^1}\,(0 < p < 1)$,

  $(iii)\, Sf \in L\log^+ L$ の時 $\|g(f)\|_p \le C\|Sf\|_{L\log^+ L} + C$,

  $(iv)\, \hat{f}(0) = 0$, $g(f) \in L^1$ の時 $\|f\|_{H^p} \le C\|g(f)\|_1\,(0 < p < 1)$.

- (Coste [6]) 数列 $s = \{s_0, s_1, \cdots\}$, $0 \le s_n \le n$ に対して

$$\sigma_{(s)}^{\alpha} f := \{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\alpha s_n} E(|d_n f|^2 | F_{n-s_n})\}^{\frac{1}{2}}$$

とおけば,

$$\|\sigma_{(s)}^{\alpha} f\|_p \le C\|Sf\|_p,\ \frac{1}{1+\alpha} < p < \infty,\ \alpha \ge 0.$$

証明は $g_{\lambda}^* f$ と Sf の関係を示した Calderon-Torchinsky の手法により $a = \{0, 1, \cdots, a, a, \cdots\}$ に対して $\|\sigma_{(a)}^0 f\| \le C2^{\frac{a}{p}-\frac{1}{2}}\|Sf\|_p$, $(\sigma_{(s)}^{\alpha} f(x))^2 \le \sum_{a=0}^{\infty} a^{-\alpha a}(\sigma_{(a)}^0 f(x))^2$ を導いてから得ている。

9 部分和の概収束

概収束についての Carleson-Hunt の結果は Walsh-Fourier 級数でも成立する。すなわち，$\mathcal{M}f(x) := \sup|S_n f(x)|$ とおくと次の通りである。

- $f \in L^p,\ 1 < p < \infty$ の時 $\mathcal{M}f(x) \in L^p,\ \|\mathcal{M}f\|_p \le C\|f\|_p$.
- $f \in L^p,\ 1 < p < \infty$ の時 $S_n f(x) \to f(x)\ a.e.$

  この結果は次と補間内挿公式を使って得られる。

- 可測集合 F の特性函数$f = \xi_F, y > 0, 1 < p < \infty, N \in \mathrm{N}, L = O\left(\dfrac{p^2}{p-1}\right)$ に対して集合$E = E(y,p,N,f)$ と定数 C が存在して

$$(i)|E| \le \left(\frac{C}{y}\right)^p |F|^{\frac{1}{p}},$$
$$(ii) x \notin E, 0 \le n < 2^N \text{ならば} |S_{n+1}f(x)| \le CLy.$$

  Yano([63]) の外挿公式, すなわち線型変換T と $1 < p$ に対して

$$\|T\xi_A\|_p \le C(p-1)^{-m}|A|^{\frac{1}{p}} \text{ の時 } \|Tf\|_1 \le C\int |f|(\log^+|f|+1)^m dx$$

  を使えば次が得られる。

- $f \in L(\log^+ L)^2$ の時$\|\mathcal{M}f\|_1 \le C\int|f(x)|(\log^+|f(x)|)^2 dx + C$.
- $f \in L^\infty$ の時 $|\{x : \mathcal{M}f(x) > y\}| \le C_1 \exp\{-\dfrac{C_2 y}{\|f\|_\infty}\}$.
- $\int|f(x)|(\log^+|f(x)|)(\log^+\log^+|f(x)|)dx < \infty$ の時, $S_n f(x) \to f(x)\ a.e.$

  Soria は Yano の外挿公式が準線型変換T と $1 < p < p_0$ に対して,
  $\|T\xi_A\|_1 \le C(p-1)^{-m}|A|^{\frac{1}{p}}$
  の時でも成り立つことを示し, 次に用いた。$t > 0$ に対して
  $\lambda_f(t) := |\{x : |f(t)| > t\}|$. ϕ は$[0,1]$ 上で正, 単調増加, 凹, $\phi(0) = 0$.
  $B_\phi := \{f : \|f\|_\phi := \int_0^\infty \phi(\lambda_f(t))dt < \infty\}$,
  $B_\phi^* := \{f \in B_\phi : \int_0^\infty \phi(\lambda_f(t))(1 + \log(\frac{\|f\|_\phi}{t\phi(\lambda_f(t))}))dt < \infty\}$,
  $\phi_m(s) := s(1+\log^+(\frac{1}{s}))^m$ とおくと$L(\log^+ L)^m(\log^+\log^+ L)_{loc} \subset (B_{\phi_m}^*)_{loc}$ である。

- (Soria [26,27]) $f \in B_{\phi_1}^*$ ならば $S_n f(x) \to f(x)\ a.e.$

概収束については Billard([2]), Gosselin([13,14]), Sölin([32]), Tateoka([34]), Chao([3]), Watari([56]), Schipp([23,24,25]), Hunt([15]), Hunt-Taibleson([16]), Igari([19]) などがある。

10 端数積分

$f \in S', \alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$(\widehat{J^\alpha f})(n) := \widehat{G_\alpha}(n)\hat{f}(n), \widehat{G_\alpha}(n) := (\max[1, |n|])^{-\alpha}$$

とおいて, $J^\alpha f$ を f の α 次 Bessel potential という。

$\Re\alpha > 0$ の時, $G_\alpha(x) = C_\alpha(|x|^{\alpha-1} - 2^{\alpha-1}), \alpha \neq 1, G_1 = \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2}{|x|}\right)$ である。

$X_\theta := H^{\frac{1}{\theta}}(\theta > 0), BMO\,(\theta = 0), \Lambda_{-\theta}\,(\theta < 0)$ とおく。

- (Hardy-Littlewood) $\alpha > 0, 0 < p \leq 1$ の時

  $(i)\,\theta \geq \frac{1}{p} - \alpha$ ならば $f \in H^p$ の時 $J^\alpha f \in X_\theta$, $\|J^\alpha f\|_{X_\theta} \leq C\|f\|_{H^p}$.

  $(ii)\,\theta < \frac{1}{p} - \alpha$ ならば $f \in H^p$ が存在して$J^\alpha f \notin X_\theta$.

  証明は$J^\alpha f = G_\alpha * f, \|G_\alpha(\cdot + h) - G_\alpha(\cdot)\|_{H^1} \leq C|t|^\alpha$ を使う。
  $p > 1$の時は Watari([57]).

$$J^\alpha(H^p) := \{g \in S' : J^\alpha f = g,\ f \in H^p\},\ \|J^\alpha f\|_{J^\alpha(H^p)} := \|f\|_{H^p}$$

とおいてこの Hardy-Bessel ポテンシャル空間を特徴づける。$\alpha > \dfrac{1}{p} - 1$ の時, Hardy-Littlewood の定理から$J^\alpha(H^p)$の超函数は可積分函数である。

$1 \leq s \leq 2,\ \alpha > 0$ に対して

$$D_\alpha^s F(x) := (\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2\alpha k}\{\int_{|y|=1} |F(x + t^k y) - F(x)|^s dy\}^{\frac{2}{s}})^{\frac{1}{2}}, x \in O$$

とおくと次が成り立つ。

$$D_\alpha^1 F(x) \leq C D_\alpha^s F(x) \leq C D_\alpha^2 F(x) = C(\int_{|y|\leq 1} \frac{|F(x+y) - F(x)|^2}{|y|^{1+2\alpha}} dy)^{\frac{1}{2}}$$

- $0 < p \leq 1, 1 \leq s \leq 2,\ \dfrac{1}{p} - 1 < \alpha,$ に対して$f \in J^\alpha(H^p)$ である必要十分条件は
  $D_\alpha^s f \in L^p,\ 1 \leq s \leq 2$ である。

  証明は$g \in H^p$ を$g = \sum \lambda_i a_i, \|g\|_{H^p} \sim (\sum \|\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}}\,(a_i : p - atom)$ と書く。$b_i = J^\alpha a_i$ とおけば$f = J^\alpha g = \sum \lambda_i b_i$. したがって

$$\|D_\alpha^2 f\|_p^p \leq \int (\sum |\lambda_i| D_\alpha^2 b_i(x))^p dx \leq \sum \|\lambda_i|^p \|D_\alpha^2 b_i\|_2^p.$$

  ここで Plancherel により $\|D_\alpha^2 b_i\|_2^2 \leq C\|a_i\|_2^2 \leq C$ だから示された。
  逆向きは$Sf(x) \leq C D_\alpha^1 J^\alpha f(x)$ を示せば良い。$\Delta_k(x) := D_{2^k}(x) - D_{2^{k-1}}(x)$ とおくと, $J^{-\alpha}\Delta_k = 2^{k\alpha}\Delta_k,\ \Delta_k = 2^{k-1}(|x| \leq 2^{-k}), = -2^{k-1}(|x| = 2^{-k+1}), = 0(2^{-k+1} < |x| \leq 1), \int \Delta_k = 0$ である。これから

$$
\begin{aligned}
d_k f(x) &= (J^{-\alpha}\Delta_k * J^\alpha f)(x) \\
&= 2^{k\alpha}\int \Delta_k(t)(J^\alpha f(x-t) - J^\alpha f(x))du \\
&= 2^{k\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{|u|=1}\Delta_k(t^i u)(J^\alpha f(x-t^i u) - J^\alpha f(x))du.
\end{aligned}
$$

従って Minkowski の不等式を使って

$$
\begin{aligned}
Sf(x) &\leq \{\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k\alpha}\sum_{i=-1}^{\infty}2^{-i+1}\int_{|u|=1}|J^\alpha f(x-t^{k+i}u) - J^\alpha f(x)|du)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=-1}^{\infty}\{\sum_{k=1}^{\infty}2^{k\alpha-i+1}\int_{|u|=1}|J^\alpha f(x-t^{k+i}u) - J^\alpha f(x)|du)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq CD_\alpha^1 J^\alpha f(x).
\end{aligned}
$$

$J^\alpha(H^p)$のこの特徴付けには幾つかの応用がある。例えば点毎の Multiplier の代数や Bessel Capacity の評価に用いられる。

文献

1. Balashov.L.A and Rubinshtein.A.I., Series with respect to the Walsh system and their generalization, J.Soviet Math.,1(1973)727–763.

2. Billard P., Sur la convergence presque partout des sèries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$, Studia Math.,28(1967)363–388.

3. Chao.J.A., Convergence of generalized Walsh-Fourier series, Tamkang J.Math.,17(1986) 123–128.

4. Chao.J.A., H^p and regular martingale, Springer's LNM, 908 (1982)274–284.

5. Chao.J.A., Hardy spaces on regular martingales, Springer's LNM, 939(1983)18–28.

6. Saloff-Coste L., Variations quadratiqes conditionnees et trnsformations de martingales, Bull.Sci. Math.,111(1987)387–399.

7. Edwards R.E. and Gaudry G.I., Littlewood-paley and multiplier theory, Springer,1977.

8. Elliott D.F. and Rao K.R., Fast transforms argorithms, Analyses, Applications. Academic press,inc.,1982.

9. Fine N.J., On the Walsh functions, Trans. Amer. Math. Soc.,65(1949) 372–414.

10. Fine.N.J., Cesàro summability of Walsh-Fourier series, Proc.Nat.Acad. Sci.U.S.A., 41 (1955) 588–591.

11. Fujii N., A maximal inequality for H^1-functions on a generalized Walsh-Paley group, Proc. Amer. Math. Soc., 77(1979) 111–116.

12. Gelfand I.M. and Graev M.I., Representations of a group of matrices of the second order with elements from a locally compact field, and special functions on locally compact fields, Russian Math. Surveys, 18 (1963) 29–100.

13. Gosselin J.A., Almost everywhere convergence of Vilenkin-Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 185 (1973) 345–370.

14. Gosselin J.A., On the convergence of Walsh-Fourier series for $L^2(0,1)$, Studies in Analysis. Advances Math. Supp., 4 (1979) 223–232.

15. Hunt R.A., Almost everywhere convergence of Walsh-Fourier series of L^2 -functions, Actes, Congr̀es Intern.Math.,(1970)655–661.

16. Hunt R.A. and Taibleson M.H., Almost eveywhere convergence of Fourier series on the ring of integers of a local field, SIAM J. Math. Anal., 2 (1971)607–625.

17. Hirschman.I.I., The decomposition of Walsh and Fourier series, Memoirs Amer.Math. Soc., 15 (1955)1–65.

18. Igari S., Sur les facteurs de convergence des series de Walsh-Fourier, J d'analyse Math., 15 (1965)389–401.

19. Igari S., 多重フーリエ級数の収束問題 (L.Carleson の結果も含めて), 数学, 25 (1973)110–119.

20. Igari S., Notes on the generalized Walsh-Fourier transform,

21. Kinukawa M., Integrability of Walsh series, Acta Math Hung., 46 (1985) 57–65.

22. Paley R.E.A.C., A remarkable series on orthogonal functions (1)(2), Proc. London Math. Soc., 34(1932)241–279.

23. Shipp F., Pointwise convergence of expansions with respect to certain product systems, Analysis Math., 2(1976) 65–76.

24. Shipp F., Maximal inequalities, Approximation and function spaces, (1981)629–644.

25. Shipp F., Fourier series and martingale transforms, Linear spaces and approximation, (1978) 571–581.

26. Soria F., Note on differentiation of integrals and the halo conjecture, Studia Math., 81(1985) 29–36.

27. Soria F., On an exrapolation theorem of Carleson-Sjölin with applications to a.e. convergence of Fourier series,

28. Stroženko $\grave{E}$.A. and Krotov V.G. and Oswal'd P., Direct and converse theorems of Jakson type in L^p spaces,$0 < p < 1$, Math. USSR Sbornik, 27(1975)355–374.

29. Sunouchi G., On the Walsh-Kaczmarz series, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951)5–11.

30. Sunouchi G., 実函数論 50 年 - Fourier 解析関係 -, 数学, 37(1985) 61–68.

31. Sunouchi G., Strong summability of Walsh Fourier series, Tohoku Math. J., 16 (1964) 228–237.

32. Sjölin P., An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series, Ark. Math.,7(1969)551–570.

33. Taibleson M.H., Fourier analysis on Local Fields, princeton, 1975.

34. Tateoka J., On almost everywhere convergence of Walsh-Fourier series, Proc. Japan Acad., 44 (1968) 647–650.

35. Tateoka J., On the localization property of the double Walsh-Fourier series, Studia Sci. Math. Hungarica, 11 (1976) 407–411.

36. Tateoka J., On some inequalities for Walsh-Fourier series, Acta Sci. Math., 52 (1988) 387–392.

37. Tateoka J., The modulus of comtinuity and the best approximation over the dyadic group.

38. Uno Y., On absolute convergence of Vilenkin Fourier series, Sci. Rep. Kanazawa, 32 (1987)69–80.

39. Uno Y., On theorems of A.Zygmund type on absolutely convergent Vilenkin Fourier series, Sci. Rep. Kanazawa, 32(1987)81–86.

40. Uno Y., Absolute convergence of Vilenkin Fourier series, Sci. Rep. Kanazawa,29(1984) 97–102.

41. Uno Y., Lipschitz functions and convolution on Vilenkin groups.

42. Vilenkin N.Ja., On a class of complete orthogonal systems, Amer. Math. Soc. Transl., 28(1963)1–35.

43. Wade W.R., A uniqueness theorem for Haar and Walsh series, Trans. Amer. Math. Soc.,141(1969)187–194.

44. Wade W.R., Uniqueness and α-capacity on the 2^w, Trans. Amer. Math. Soc., 208 (1975)309–315.

45. Wade W.R., L^r inequalities for Walsh series,$0 < r < 1$, Acta Sci. Math., 46(1983)233–241.

46. Wade W.R., Sets of uniqueness for the group of integers of a p-series field, Canad. J. Math., 31(1979)858–866.

47. Wade W.R., $H^{(n)}$-sets for the group of integers of a p-series field, Harmonic Analysis in Euclidean spaces. Part 2, 35(1979)325–328.

48. Wade W.R. and Lippman.G.E., Pseudofunctions and uniqueness on the group of integers of a p-series field, Acta Math. Hung.,35(1980)1–12.

49. Wade W.R. and Yoneda K., Uniqueness and quasimeasures on the group of integers of a p-series field, Proc. Amer. Math. Soc., 84(1982)202–206.

50. Wade W.R., Recent developments in the theory of Walsh series, Internat. J. Math. Sci., 5(1982)625–673.

51. Wade W.R., Uniqness of walsh series which satisfy an averaged growth condition, SIAM J. Math. Anal., 11 (1980)933–937.

52. Wade W.R., Growth conditions and uniqueness for Walsh series, Michigan Math. J.,24 (1977) 153–156.

53. Watari C., On generalized Walsh Fourier series, Tohoku Math. J., 10 (1958) 211–241.

54. Watari C., Best approximation by Walsh polynomials, Tohoku Math. J., 15 (1963) 1–5.

55. Watari C., Mean convergence of Walsh Fourier series, Tohoku Math. J., 16 (1964)183–188.

56. Watari C., Walsh Fourier 級数の概収束について, 実解析セミナー (金沢大学),(1981)148–162.

57. Watari C., Multipliers for Walsh Fourier series, Tohoku Math. J., 16(1964)239–251.

58. Watari C., On decomposition of Walsh Fourier series, Tohoku Math. J., 17(1965)76–86.

59. Watari C., Approximation of functions by a Walsh-Fourier series, Proceedings of Applications of Walsh functions, (1970)166–169.

60. Watari C and Okuyama Y., Approximation property of functions and absolute convergence of Fourier series, Tohoku Math. J., 27(1975) 129–134.

61. Yano S., On Walsh functions, Tohoku Math. J., 3(1951) 223–242.

62. Yano S., Cesaro summability of Fourier series, Tohoku Math. J., 5 (1953) 194–195.

63. Yano S., Notes on Fourier analysis (XXIX):An Extrapolation theorem, J. Math. Soc. Japan, 3 (1951) 296–305.

64. Yano S., On approximation by Walsh functions, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951)962–967.

65. Yano S., Cesàro summability of Walsh-Fourier series, Tohoku Math. J.,9(1957) 267–272.

66. Yano S., On a lemma of Marcinkiewicz and its appllications to Fourier series, Tohoku Math. J.,11(1959)191–215.

67. Yoneda K., A generalized capacity and a uniqueness theorem on the dyadic group, Proc. Amer. Math. Soc., 102(1988)52–56.

68. Yoneda K., On genelarized uniqueness theorems for Walsh series, Acta Math. Hung.,43 (1984) 209–217.

69. Yoneda K., Perfect sets of uniqueness on the group 2^{ω}, Can. J. Math., 34(1982)759–764.

70. Yoneda K., Sets of uniqeness for a certain class M_{ε} on the dyadic group, Proc. Amer. Math. Soc., 89(1983)279–284.

71. Yoneda K., Sets of multiplicity on the dyadic group, Acta Math. Hung.,41(1983)195–200.

72. Yoneda K., Summing generalized closed U-sets for Walsh series, Proc. Amer. Math. Soc.,94(1985)110–114.

73. Yoneda K., Dirichlet sets and some uniqueness theorems for Walsh series, Tohoku Math. J.,38(1986)1–14.

74. Young W.S., Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc.,218(1976)311–320.

75. Morgenthaler, On Walsh-Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc.,84(1957)472–507.